## Übungsaufgaben Einführung in die Differenzialrechnung

1. Bestimmen Sie jeweils das Verhalten im Unendlichen:

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x + 2 \qquad g(x) = -0{,}5\, x^4 + 5x^2 + 3$$
$$h(x) = 3x^2(-x^3 + 1) \qquad t(x) = 3x^2(4x-2)^2$$

2. Geben Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen an:

f, g, h, t siehe 1. ; $i(x) = 3t^2-4t$ ; $i(t) = 3t^2-4t$ ; $k(x) = (3x^4 - 5x^2)4x^5$

$l(x)=\sqrt{2x-x^2}$ , $m(x)=\frac{2}{(3x-1)^3}$, $n(x)=\frac{3x}{x^2+1}$, $o(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}$, $p(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

$q(x) = 5a^3x^4 - 6a^2x^3$ $\qquad$ $q(a) = 5a^3x^4 - 6a^2x^3$

3. Berechnen Sie jeweils die Tangenten an f(x) an den gegebenen Stellen und
   - jeweils die resultierenden Winkel zur Abszissenachse,
   - jeweils die resultierenden Winkel zur Ordinatenachse,
   - die Fläche, die jeweils der Graf der Tangente zusammen mit den Koordinatenachsen einschließt:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ $\qquad$ $x_o = \{2; 3; 4\}$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ $\qquad$ $x_o = \{ -\frac{1}{2}; 5; \sqrt{2} \}$

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+\frac{7}{4}$ ; $x_o=\{1;-2;\sqrt{3}\}$

d) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ; $x_o=\{-1;1;\sqrt{3};2\}$

4. Berechne alle Tangenten an f(x), die den Anstieg m haben!

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^2-6x+2$ , $m=5$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$ ; $m = -9$

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-6x^2+3x$ , $m=3$

d) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-6x^2+4x$ , $m=-6$

e) $f(x) = \sqrt{3\cdot x'+1}$ , $m=\frac{3}{4}$

Lösungen:

1. f: $\pm\infty$ , g: $=\infty$ , h: $\mp\infty$ , t: $\overset{+}{\underset{+}{\infty}}$

2. $f'(x)=9x^2-8x+6$ , $f''(x)=18x-8$ , $g'(x)=-2x^3+10x$ , $g''(x)=-6x^2+10$
$h'(x)=-15x^4+6x$, $h''(x)=-60x^3+6$, $t'(x)=192x^3-144x^2+24x$,
$t''(x)=576x^2-288x+24$, $i'(x)=i''(x)=0$, $i'(t)=6t-4$, $i''(t)=6$,
$k'(x)=108x^8-140x^6$, $k''(x)=864x^7-840x^5$, $l'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $l''(x)=\frac{-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$
$m'(x)=\frac{-18}{(3x-1)^4}$, $m''(x)=\frac{216}{(3x-1)^5}$, $n'(x)=\frac{-3\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$, $n''(x)=\frac{6x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$,
$o'(x)=\frac{-2\cdot(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2}$, $o''(x)=\frac{4x^3+6x^2+12x+2}{(x^2-1)^3}$, $p'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$,
$p''(x)=\frac{4\cdot(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$, $q'(x)=20\cdot a^3\cdot x^3-18\cdot a^2\cdot x^2$ , $q''(x)=60\cdot a^3\cdot x^2-36\cdot a^2\cdot x$ ,
$q'(a)=15\cdot a^2\cdot x^4-12\cdot a\cdot x^3$ , $q''(a)=30\cdot a\cdot x^4-12\cdot x^3$

3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $y = -2x + 5$<br>$\alpha_x = 63{,}43°$ , $\alpha_y = 26{,}57°$ ,<br>$A = \frac{25}{4}$ FE | $y = 0$<br>$\alpha_x = 0°$ , $\alpha_y = 90°$<br>Die Fläche exisitert nicht. | $y = 2x - 7$<br>$\alpha_x = 63{,}43°$ , $\alpha_y = 26{,}57°$ ,<br>$A = \frac{49}{4}$ FE |
| b) | $y = \frac{31}{4}x+\frac{1}{4}$<br>$\alpha_x = 82{,}65°$ , $\alpha_y = 7{,}35°$ ,<br>$A = \frac{1}{248}$ FE | $y = 38x - 151$<br>$\alpha_x = 88{,}49°$ , $\alpha_y = 1{,}51°$ ,<br>$A = \frac{22801}{76}$ FE | $y \approx -2{,}31x + 1{,}34$<br>$\alpha_x = 66{,}63°$ , $\alpha_y = 23{,}37°$ ,<br>$A \approx 0{,}39$ FE |
| c) | $y = -3x+3$<br>$\alpha_x = 71{,}57°$ , $\alpha_y = 18{,}43°$ ,<br>$A = \frac{3}{2}$ FE | $y=-\frac{9}{4}$<br>$\alpha_x = 0°$ , $\alpha_y = 90°$ ,<br>Das Dreieck exisitert nicht. | $y=-\sqrt{3}\cdot x+1$<br>$\alpha_x = 60°$ , $\alpha_y = 30°$ ,<br>$A = \frac{\sqrt{3}}{6}$ FE |
| d) | $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$<br>$\alpha_x = 30°$ , $\alpha_y = 60°$ ,<br>$A = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{3}$ FE | $y=\frac{-\sqrt{3}}{3}\cdot x+\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$<br>$\alpha_x = 30°$ , $\alpha_y = 60°$ ,<br>$A = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{3}$ FE | $y=-\sqrt{3}\cdot x+4$<br>$\alpha_x = 60°$ , $\alpha_y = 30°$ ,<br>$A = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{3}$ FE |

Bei $x_o = 2$ existiert keine Tangente

4. a) $x_T = 22$ , $y = 5x - 119$ , b) $x_T = 2$ , $y = -9x + 8$ , c) $x_T \in \{-3;0;4\}$,
$y=3x-\frac{99}{4}$ , $y=3x$ , $y=3x-\frac{160}{3}$ , d) $x_T \in \{-4{,}32;1;2{,}32\}$,
$y\approx-6x-94{,}98$ , $y=-6x+\frac{55}{12}$ , $y=-6x+2{,}31$ , e) $x_T=1$ , $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$